# Тема: Визначений інтеграл та його геометричний зміст. Властивості визначеного інтеграла.

**адачі, що привели до поняття визначеного інтеграла**

Розглянемо дві задачі — геометричну та фізичну.

***1. Обчислення площі криволінійної трапеції***. Нехай на відрізку **[а, b]** визначена неперервна функція **у = *f*(х)** і будемо поки що вважати, що ***f*(х)http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img001.jpg** 0 для усіх ***x****є***[а, b].**

Фігуру, обмежену кривою у = ***f* (х)**, відрізком **[а, b]** осі 0х, прямими **х =а** та **х = b**, називають криволінійною трапецією (рис. 1). В окремих випадках може ***f*(а)** = 0 або ***f* (b)** = 0 і тоді відповідна сторона трапеції стягується в точку.

Для обчислення площі **S** цієї криволінійної трапеції поділимо відрізок **[а,b]** довільним чином на **n** частин точками **а = х0 < x1 < х2 < ... < xk < ... < хn= b**

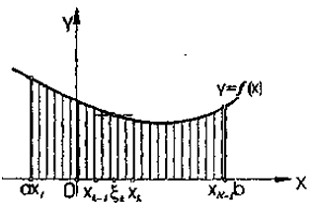


Рис. 1

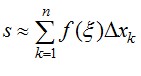
Довжини цих частин http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img003.jpg.

Перпендикуляри до осі 0х, проведені із точок ділення до перети­ну із кривою **у = *f*(х),** розділяють усю площу трапеції на **n** вузьких криволінійних трапецій. Замінімо кожну із цих трапецій прямокутника з основою http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img004.jpgта висотою http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img005.jpg, де http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img006.jpg. Площа кожного такого прямокутника дорівнює http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img007.jpg

Сума площ усіх таких прямокутників буде дорівнювати

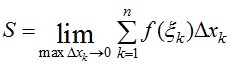
http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img008.jpg

Таким чином,  площа **S**  криволінійної трапеції наближено дорівнює цій сумі, тобто



Ця формула буде тим точнішою, чим менше величина http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img010.jpg.

Щоб одержати точну формулу для обчислення площі **S** криволінійної трапеції, треба в цій формулі перейти до границі, коли http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img011.jpg Тоді

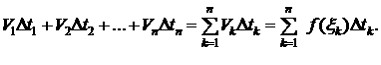
                                  (1) http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img013.jpg

***2. Обчислення шляху, який пройшла точка***. Нехай потрібно визначити шлях **S**, який пройшла матеріальна точка, що рухається в одному напрямі із змінною швидкістю **V(t)** за час від **t0** до **T**.

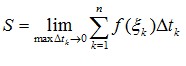
Поділимо проміжок часу **T-t0** на **n** частин: ?t1,?t2,…,?tn.

Позначимо через http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img014.jpg довільний момент часу із проміжку ?tk, а значення швидкості у цій точці позначимо http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img015.jpghttp://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img016.jpg.

Точка, що рухається з постійною швидкістю **Vk** на проміжку часу **?tk**, проходить за цей час шлях http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img017.jpg а за час **T - t0** вона пройде шлях



Будемо вважати, що шлях **S**, пройдений точкою, наближено дорівнює цій сумі. Коли **?tk?**0, тоді змінна швидкість на проміжку **?tk** мало відрізняється від постійної **Vk**. Тому дійсне значення шляху, пройденого точкою за час **T - t0** буде дорівнювати границі цієї суми при max **?tk? 0**, тобто

                                             (2)

До аналогічної суми зводиться задача про роботу змінної сили, що направлена по прямій лінії — траєкторії руху точки, до якої прикладена ця сила та інші задачі.

**Означення визначеного інтеграла та його зміст**

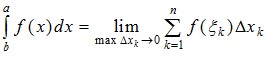
Нехай функція  ***f* (х)** задана на відрізку **[a, b]**. Розіб'ємо цей відрізок на **n** частин точками ділення **а = х0 < x1 < x2 < ...   < хn = b**

У кожному проміжку **[xk-1, xk]** довжиною **?хk** = **хk**-**хk-1**оберемо довільну точку http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img020.jpg і обчислимо відповідне значення функції http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img021.jpg.

Побудуємо суму   http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img022.jpg яку називають інтегральною сумою для функції  ***f*(х)** на відрізку **[а,b].**

**Означення 1**. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми при http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img023.jpg, незалежна від способу ділення відрізка **[а,b]** на частини та вибору точок http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img024.jpg, то ця границя називається ***визначеним інтегралом***від функції ***f* (х)** на відрізку **[а,b]** і позначається http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img025.jpg.

Математично це означення можна записати так:

.                              (3)

Відмітимо, що числа **а** та **b** називають нижньою та верхньою межами, відповідно.

Згідно з цим означенням рівності (1) та (2) тепер можна за­писати у вигляді

                                                    (4)

тобто площа криволінійної трапеції **S** та шлях **S**, пройдений точкою із змінною швидкістю **V = *f* (t)** виражаються визначеним інтегралом.

**Теорема 1**. Якщо функція ***f* (х)** неперервна на відрізку **[а, b]** або обмежена і має скінченну кількість точок розриву на цьому відрізку, то границя інтегральної суми існує, тобто функція ***f* (х)** інтегрована на **[a, b].**

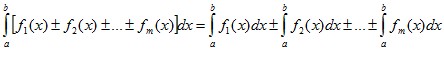
**Основні властивості визначеного інтеграла**

Із означення (3) визначеного інтеграла та основних теорем про граниш випливають слідуючі властивості.

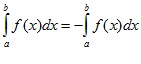
**1.** Постійний множник можна виносити за знак визначеного інтеграла, тобто якщо **А** — стала, то

## http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img029.jpg

**2.** Визначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченної кіль­кості функцій дорівнює такій самій алгебраїчній сумі інтегралів від кожного доданку, тобто



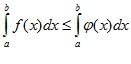
**3.** Якщо поміняти місцями межи інтегрування, то визначений інтеграл змінює свій знак на протилежний, тобто



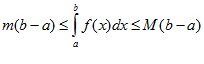
**4.** Визначений інтеграл з рівними межами дорівнює нулю, тобто

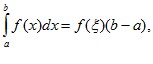


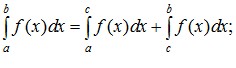
для будь-якої функції  ***f* (х).**

**5.** Якщо ***f* (х)** **http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img033.jpghttp://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img034.jpg(х),** **х** http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img035.jpg **[а, b],** то 

**6.** Якщо **m** та **M** — найбільше та найменше значення функції ***f* (х)** на відрізку **[a,b],** то

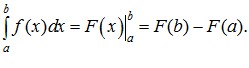


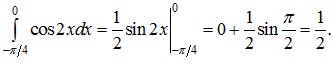
**7.**  де http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img039.jpg

**8.**  http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img041.jpg

**6.2. Обчислення визначеного інтеграла**

**Формула Ньютона-Лейбніца**



**Приклад 1.**

**Заміна змінної у визначеному інтегралі**

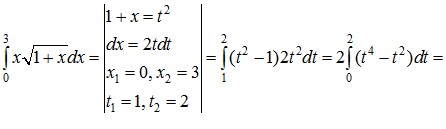
**Теорема 1.** Нехай задано інтеграл http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img044.jpg, де ***f* (х)** неперервна на відрізку **[а,b].** Зробимо підстановку х = http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img045.jpg(t), аhttp://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img046.jpgthttp://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img047.jpg?, де http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img048.jpg(t) неперервно диференційована функція на відрізку [http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img049.jpg,?].

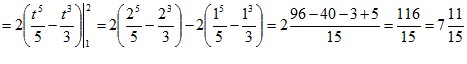
Якщо:   1) при зміні t від http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img050.jpg до ? змінна х змінюється від а до b, тобто http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img051.jpg(?)= а, http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img052.jpg(?) = b;

2)   складна функція *f*[http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img053.jpg(t)] визначена і неперервна на відрізку   [http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/file.php/893/uploader/6_VIZNA_ENII_NTEGRAL/img054.jpg,?], тоді має місце рівність

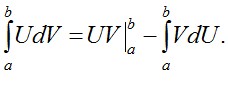
                                         (9)

**Приклад 2.** Обчислити .

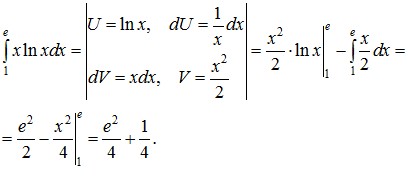


.

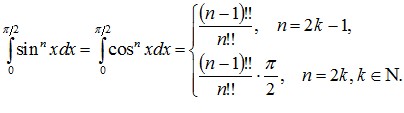
**Формула інтегрування частинами**

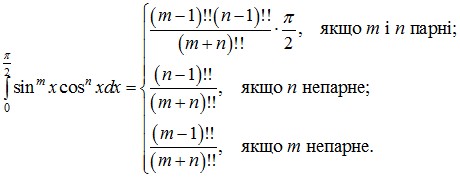


**Приклад 3.**Обчислити  



**Формули Валліса**





**Домашнє завдання:**

Повторити параграф 6,7

Вправи № 245, 247, 278